Chapitre 3

Fonctions linéaires et affines

1/ **Notion de fonctions :**

a/ **Introduction :**

Dans tout ce qui va suivre, le terme de fonction est entendu au sens mathématique. En effet, il y a plusieurs définitions et en voici quelques exemples :

- En français, c' est un rôle joué par un groupe de mots dans une phrase (fonction sujet, fonction complément…).
- Dans la vie quotidienne, « être en fonction de » est souvent employé (le prix est en fonction du poids…)
-

Toutes ces expressions soulignent **un lien** entre deux quantités. En mathématiques, une fonction est aussi **un lien entre des nombres**.

On peut dire en quelque sorte qu' une fonction est une « machine à nombre » c' est à dire qu' à un nombre elle associe un autre nombre.

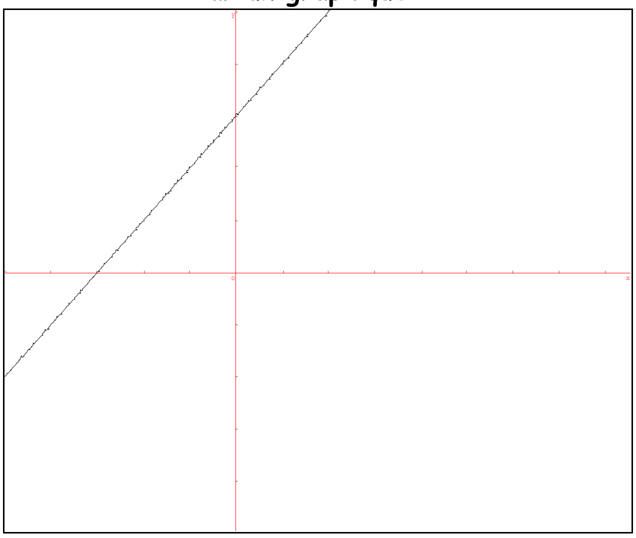
Prenons un exemple simple : la fonction qui ajoute 3. Au nombre 0 elle associe 3, à 1 elle associe 4….

Un problème se pose : comment écrire ou traduire cette fonction ?

- **Par un tableau :**

- 1	**0**	**1**	**2**	**2. 5**
2	**3**	**4**	**5**	**5. 5**

- **Par un graphique :**



Avec ces deux aspects, nous pouvons constater qu' il est impossible de décrire toute la fonction . Il faut donc une formule générale.

C' est là qu' intervient la notion de **variable**. Comme son nom l' indique c' est un nombre qui varie et qu' on note x .

C' est un peu l' équivalent de « truc » ou de « machin », il ne prend son sens que lorsqu' on désigne quelque chose de précis : « passe moi le truc » en montrant le stylo.

Pour revenir à notre exemple de la fonction qui ajoute 3, on va la définir :

- **Par une formule :**

f : $x \mapsto x + 3$ qui se lit f est la fonction qui à x associe $x + 3$

b/ **Définition :**

Une fonction est un procédé de calcul qui à un nombre x associe un unique autre nombre $y =$ f (x).

Notation : f : $x \mapsto y =$ f (x)

Attention ! f (x) ne désigne pas le produit de f par x . f (x) se lit f de x .

Autres exemples de fonctions :

- élever au carré
- prendre l' inverse
- multiplier par un nombre : c' est la fonction linéaire qu' on va étudier au paragraphe suivant.

<u>Synthèse :</u> f : $x \mapsto x + 3$

Aspect calcul :

Une fonction est ………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Aspect formule :

Aspect tableau :

Aspect graphique :

2/ Fonctions linéaires :

a/ Généralités :

Définitions :	Une fonction linéaire associe à tout nombre x le nombre ax, noté f (x) ou y. a est appelé coefficient de linéarité.

Notations : f : $x \mapsto ax$

Ou on dira que la fonction f est définie par f (x)= ax

Remarques : La fonction linéaire est le modèle mathématique des situations de proportionnalité puisqu' elle multiplie par un même nombre.

Exemple : Considérons la fonction linéaire f qui multiplie par 0.5. On écrit f : $x \mapsto 0.5x$

f (0) = 0.5 × 0 = 0. L' image de 0 est 0.

f (2) = 0.5× 2= 1. L' image de 2 est 1.

On peut mettre cela sous la forme d' un tableau :

x	0	2
f (x)	0	1

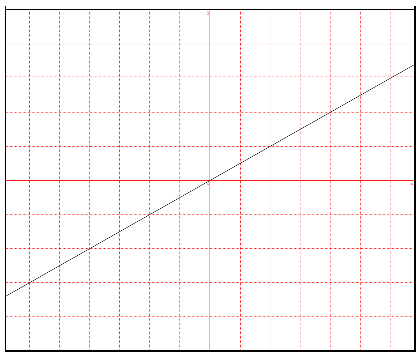
× 0.5

b/ Représentation graphique :

Propriété (admise) : La représentation graphique d' une fonction linéaire est une droite passant par l' origine.

Exemples :

Construisons d $_1$ la représentation graphique de la fonction précédente f : $x \mapsto 0.5x$.



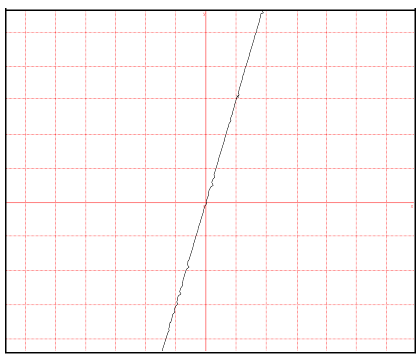
Il suffit d'utiliser un tableau de valeurs, par exemple le précédent, puis de placer les points :

O (0 ; 0) et M (2 ; 1).

On peut utiliser la représentation graphique pour lire l' image d' un nombre.

Par lecture graphique l' image de 4 est 2.

Construisons d $_2$ la représentation graphique de la fonction h : $x \mapsto -2x$.



L' image de 1 est - 2. Il suffit de placer les points O (0 ; 0) et L (1 ; - 2).

Lorsque le coefficient de linéarité est positif la droite « monte » alors que lorsque le coefficient est négatif la droite « descend ».

On dira que la droite d_2 a pour équation $y = -2x$ et que -2 est le coefficient directeur de la droite d_2.

3/ Fonctions affines :

a/ Généralités :

Définition :
Une fonction affine associe à tout nombre x le nombre $ax + b$, noté f (x) ou y .

Notations : f : $x \mapsto ax + b$
Ou on dira que la fonction f est définie par f (x)= $ax + b$.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine avec $b = 0$.


Attention !!! Le contraire est faux : une fonction affine n' est pas toujours une fonction linéaire.

Exemple : Considérons la fonction affine f définie par f : $x \mapsto 0.5x + 2$

f (0) = 0.5× 0 + 2 = 2 . L' image de 0 est 2.
f (2) = 0.5× 2 + 2 = 3. L' image de 2 est 3.
On peut mettre cela sous la forme d' un tableau :

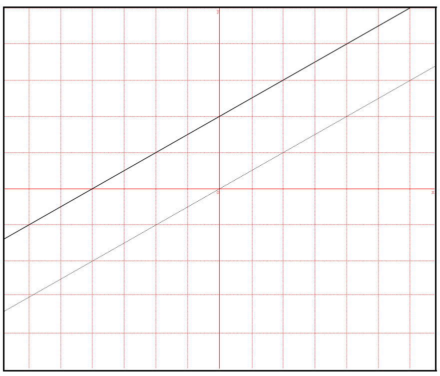
x	0	2
f (x)	2	3

b/ Représentation graphique :

Propriété (admise) : La représentation graphique d' une fonction affine est une droite qui ne passe pas forcément par l' origine .

Exemple :

Construisons d_3 la représentation graphique de la fonction précédente f : $x \mapsto 0.5x + 2$.



Il suffit d'utiliser un tableau de valeurs, par exemple le précédent, puis de placer les points :
O (0 ; 2) et M (1 ; 2.5).

On remarque que la droite d_3 est parallèle à la droite d_1 en pointillé représentant la fonction linéaire associée g : $x \mapsto 0.5x$

On dira que d_3 a pour équation $y = 0.5x + 2$ et que le coefficient directeur de d_3 est 0.5.

c/ Propriété :

On considère la fonction affine f : $x \mapsto ax + b$. Il y a proportionnalité entre les accroissement de f (x) et les accroissement de x. Autrement dit, on a :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Exemple : Déterminer le coefficient a de la fonction affine f telle que $f(3) = 8$ et $f(5) = 12$

Par la propriété précédente on a : $a = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{12 - 8}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$